Zbornik DLUM 100 let OLD v Mariboru

Priloga Zbornika

Likovniki v teoriji

dr. Marjan Drev, akad. kipar spec.

TORUSNA ŠTEVILA IN LIKOVNE UMETNOSTI

Prispevek predstavlja gradivo za Prilogo Likovniki v teoriji v okviru Zbornika DLUM ob stoletnem jubileju organizirane likovne dejavnosti v Mariboru.
Spletna objava predstavlja obvezo DLUM do financerjev, MZK in MOM. Gradivo je za enkrat še delovne narave, tako da se lahko do končne redakcije v tem letu, še dopolnjuje in spreminja.
Vsi prispevki v okviru Zbornika predstavljajo le pripravljalno gradivo za izdajo Monografije, ki bo izšla v tiskani izdaji na dan stoletnega jubileja, 8. 12. 2020.

Prispevek za Prilogo Zbornika izdal: DLUM, Trg Leona Štuklja 2, Maribor
Založnik: DLUM, Maribor

Izdaja: Prva objava
Izid: Maribor, december 2019
Odgovorna oseba založnika: Vojko Pogačar

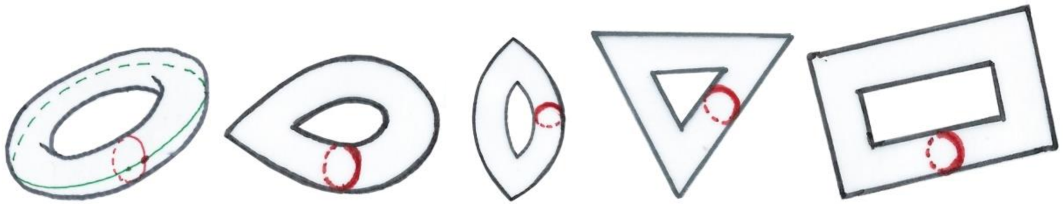
Glavni pojmi: Torus, torusna števila, geometrijske in topološke lastnosti, Möbiusovi trakovi, toroidalni vozli.
V obdobju od druge polovice 20. stol. naprej so v slikarstvu, kiparstvu, arhitekturi in drugih vizualnih umetnostih nastala mnoga dela, katerih forma bazira na torusu ali n-torusu. Nekatera eksistirajo kot realni tridimenzionalni objekti, v slikarstvu in risbi pa se pogosto pojavljajo kot objekti z optično iluzijo tretje dimenzije, ki v realnem prostoru ne morejo eksistirati na način, kot se kažejo na ploskvi. Značilnost tovrstnih objektov je hkratna prisotnost geometrijskih lastnosti (vogali, robovi, oglišča, ploskve kot tudi topoloških lastnosti, kot je rod (genus) luknje. Geometrijske ploskve pogosto nadomeščajo topološke z obliko različnih Möbiusovih trakov in toroidalnih vozlov. Tako tretirane toruse je mogoče obravnavati matematično in ploskve kvantificirati. Matematiki sicer opisujejo in vizualizirajo toruse s parametričnimi in eliptičnimi enačbami, zadnja leta pa celo z metodami algebre. Na tej osnovi že eksistirajo tridimenzionalni računalniški programi in virtualni modeli, ki jih je mogoče s tridimenzionalnimi tiskalniki prenesti v realni svet. Tovrstni kategorialna orodja za orisovanje torusa bom izpustil, ker me pri spoznavanju likovnih vsebin vodijo drugi interesi.
S stališča topologije oblikovni vidik torusa ni pomemben, dovoljene so deformacije, ukrivljenost, zavijanje, raztezanje itd. Njen interes je usmerjenost k preučevanju lukenj. Toda poljubna oblikovanost vodi v svetu stvarnih oblik v kaos in nepreglednost. Topološke oblike potrebujejo red, ki ga vanje vnaša geometija z geometrijskimi lastnostmi. Razmerje med geometrijskimi in topološkimi lastnostmi oblik z luknjami podaja sistemizacija, ki jo bom imenoval torusna števila. Torusna števila kvantificirajo luknje, oglišča in preseke nekega lika, kvaliteto pa jim določajo Möbiusovi trakovi in toroidalni vozli.

1. Prvo torusno število - število torusnih oglišč

Plastelinske deformacije dovoljujejo topološko spremembo okroglega torusa (*A*) v katero drugo obliko npr. trikotno, kvadratno… . Pri tem nastane različno število robov, torus pa s tega zornega kota postane podoben geometrijskim likom 3, 4 ali večkotnikom (*sl.1 D,E*). Število kotov je lahko tudi manjše. V tem primeru nastane torus analogen "enokotniku (henagonu ali monogonu), mnogokotniku z eno stranico, enim ogliščem in enim notranjim kotom 360º (*sl.1 B*). Druga možnost je dvókótnik (gr.digon), ki je v geometriji neravninski lik z dvema stranicama in dvema ogliščema".[1] (*sl.1 C*). Prvo torusno število določajo presečne zanke, ker povedo, kolikokrat je kontinuum prvotnega torusa prepognjen. Torus pridobi s tem robove, ki

[1] http://sl.wikipedia.org/wiki/Dvokotnik, Čas zadnje spremembe: 14:03, 15. april 2013, dostopno15. april 2013, op. cit

so geometrijska lastnost. Vrednosti ustrezajo prvi- zgornji vodoravni vrsti na tabeli toroidalnih navitij[2]: T-0-0, T-1-0, T-2-0, T-3-0, T-4-0… . *(Avtor risb MD).*

<table>
<tr><td>0/0</td><td>1/0</td><td>2/0</td><td>3/0</td><td>4/0</td><td>0/∞→</td></tr>
<tr><td colspan="6">
A *B* *C* *D* *E*</td></tr>
</table>

Slika 1: Prvo torusno število - vogali

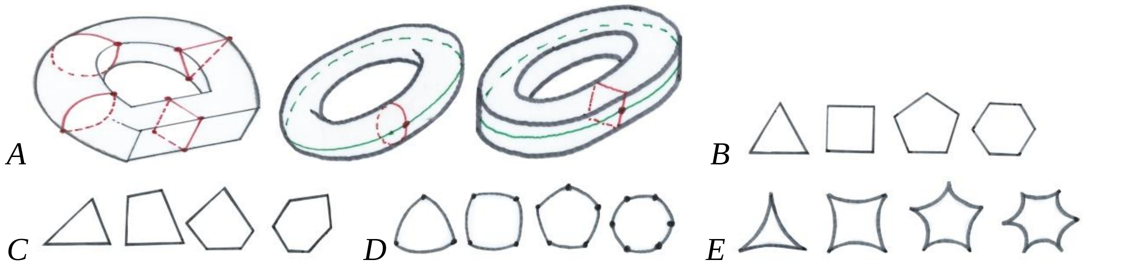
Prvo torusno število označuje vogale . To je osnova za formiranje toroidalnih poliedrov.

2. Drugo torusno število – presek lika

Enake lastnosti kotov smemo podeliti torusu tudi v preseku. Torus postane v preseku mnogokotnik z enim, dvema, tremi, štirimi ali n. koti in stranicami (*A*). Lik je v preseku trikotnik, pravokotnik, deltoid, trapez, paralelogram, itd. To karakteristiko torusa označimo kot drugo torusno število. Določa ga število q, ki v tem smislu označuje število ploskev, ki potekajo v smeri torusne telesnine. (*sl.2 A*). Primerjava med prvim in drugim številom pokaže, da je prva vrednost 0/0 enaka za obe torusni števili, vse ostale so inverzne.

[2] Tabela toroidalnih navitij je abstraktna shema števil od nič do neskončno. V tem smislu močno spominja na lambdomo, le da je kompleksnejša. Razvil sem jo kot glavno abstraktno orodje za razlago vsebin pri pisanju doktorata z naslovom Strukturalne predpostavke kiparske morfologije leta 2015 na ALUO v Ljubljani. V tem prispevku je zaradi obširnosti tematike ne morem razlagati.

0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/∞→

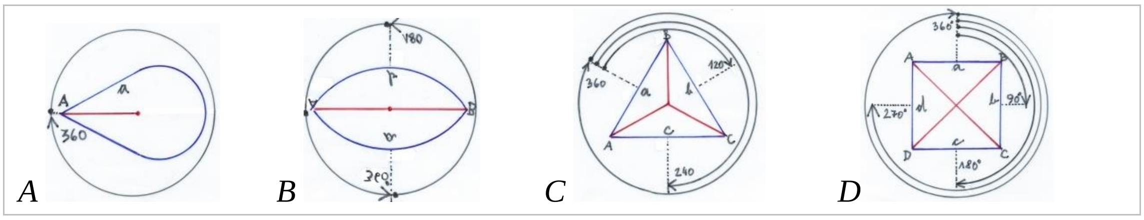


Slika 2: Drugo torusno število - presek lika.

Naslednji značilnosti preseka sta enakomerna ali neenakomerna razporeditev oglišč (*sl.2 B, C*) in lokalna geometrija ploskev, ki je lahko ravna, konveksna ali konkavna (*sl.2 D, E*). Geometrijske lastnosti prvega in drugega števila izhajajo iz lastnosti dvodimenzionalnih mnogokotnikov- poligonov. Geometrijski liki so lahko *A*: pravilni ali simetrični, *B*: nepravilni – nesimetrični s koti $\alpha > 90^0$, $\alpha = 90^0$, $\alpha < 90^0$, *C*: izbočeni ali eliptično deformirani in *D*: ubočeni ali hiperbolično deformirani. Zato je ploskev na torusu lahko lokalno (ne po celoti !) ravna, konveksna ali konkavna in glede na sosednji lokalni ploskvi širša ali ožja. Iz tega izhaja, da so tudi koti različni, npr. stranice preseka lahko odgovarjajo Pitagorovemu izreku. *(Avtor risb MD)*

3. Tretje torusno število: topološke ploskve Möbiusovi trakovi in toroidalni vozli

Torzija torusa izhaja iz rotacije ploskve za določen kot v določenem preseku. Torzija enokota A1 je kot 360° in njegov večkratnik, dvokota B1 večkratnik 180° itd. Iz kotov in drugega števila (*sl.3 A, B, C, D*) je mogoče izpeljati poljubne Möbiusove trakove ali vozle. *(Avtor risb MD)*

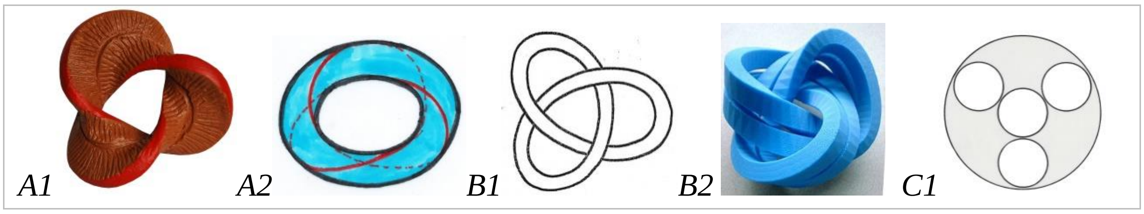

A B C D

Slika 3: Tretje torusno število – torzije Möbiusovih trakov in toroidalnih vozlov

2.8.4. Četrto torusno število - struktura toroidalnih lukenj

Glavna - enodimenzionalna luknja. To je luknja vsakega Möbiusovega traka ali enojnega torusa, ki sovpada z glavno osjo (primer MT3 ali torus *sl.4 A1, A2*). Sekundarna - dvodimenzionalna luknja s smerjo pravokotno na glavno. Nastane po razrezu MT3 v trolistni vozel V3/2 ali ob razrezu V3/2 v dva V3/2 (sl. B1, B2). Luknja je spremljevalec tangencialnih navitij. Oba tipa lukenj definirajmo kot globalna, ker zadevata celoten lik.

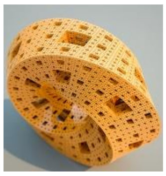
Terciarna - enodimenzionalna luknja lokalnega značaja. To je luknja dvojnega, trojnega ali n- torusa (*sl.4 C* kaže štiritorus). Kot terciarno jo označimo, ker je v relaciji z ostalimi luknjami in ker je spremljevalka toroidalnih navitij. Pri n- torusih z navitji je pogosto tako, da ena od lukenj postane glavna, druge pa so v funkciji navitij. Nazoren primer je vozel na sl. *D1*, *D2*: *D1* je po osnovni obliki trolistni vozel *B1*, ki je na treh mestih lokalno predrt z luknjami, v katere je potem telesnina vozla vstavljena. Tak vozel lahko nastane samo s pretrganjem in ponovnim lepljenjem. Luknja za vozel *D2* ni razrešena.
D2: Grossman, Bathsheba[3]; Metatrine, kovina
D3: Figure 15: George Hart[4], Fire and Ice, les in bron 1997; premer 60 cm
D4: Ob primeru torusa T-4-4-2MT4-n opremljen s fraktalom Sierpinskega postane vprašanje o številu topoloških lukenj zaradi prevelikega števila nesmiselno.


A1 A2 B1 B2 C1

[3] Ricardo Zalaya * & Javier Barrallo **; *Classification of Mathematical Sculpture*, Polytechnic University of Valencia http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/barrallo1/index.html, dostopno 27. 2. 2014, sl.4
[4] Ibid., sl.15


D1

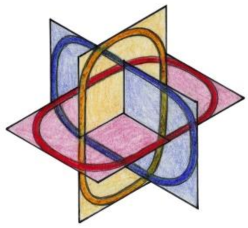
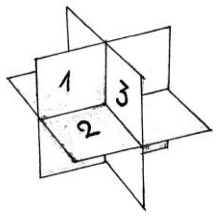
D2

D3

D4

Slika 4: Četrto torusno število - struktura toroidalnih lukenj

5. Generalna shema za ponazoritev torusnih števil

Rumeni torus je nosilec lastnosti prvega torusnega števila - torus z n. vogali, roza je nosilec drugega števila in torzij - torus z znanimi preseki, tretji - modri je nosilec lukenj. Poljubni torus tribar, ki ga orisuje kateri od Möbiusovih trakov ali toroidalnih vozlov, je kot tretje torusno število produkt ustreznih kombinacij treh torusov: (glej tribar Rogerja Penrosea v središču, *sl.5 A*). Torusi tvorijo preplet Boromejskih krogov in sovpadajo z ravninami evklidskega prostora in prostorskega križa. *(Avtor risb MD)*


A

B


C

Slika 5: Generalna shema za ponazoritev torusnih števil

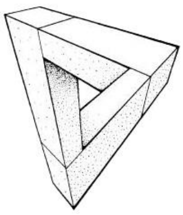
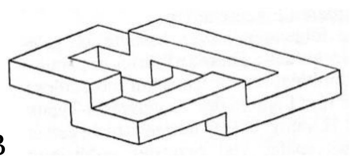
6. Nekaj primerov kombinacijskih možnosti

Besedna zveza torus- tribar napotuje na dve lastnosti. Pojem torusa je širši in zajema vse objekte z luknjami. Pojem tribarja je prvemu podrejen in označuje samo tiste toroidalne objekte, ki imajo optično ravne palice, ne pa tudi realno. V likovnih umetnostih je največkrat zastopano drugo torusno število s presekom 4. Lokalni izsek tvori kocko, s čimer je za opazovalca zagotovljena orientacija v prostoru po pogojih izometrične perspektive, kar omogoča dobro vizualno orientacijo.

Primer 1; Penrosov tribar

Definicija tribarja:
Avtor lika z imenom »tribar« je angleški matematik in teoretični fizik, sir Roger Penrose. ”Tribar je opisal kot tridimenzionalno, pravokotno zgradbo, ki pa ne predstavlja projekcije prave prostorske strukture. Nemogoči tribar je povezan s sredstvi nepravih povezav med normalnimi elementi, in sicer kot risba. Trije pravi koti so povsem normalni, le da so na napačen, prostorsko nemogoč način med seboj povezani in s tem tvorijo neke vrste trikotnik, katerega seštevek kotnih stopinj znaša 270° ”[5] (*sl.6A*). Avtorstvo tribarja bi lahko pripisali tudi nemškemu slikarju Oscarju Reuterswärdu, ki je strukturno enak lik z naslovom “Opus 1 no. 293” zrisal že leta 1934. V tem kontekstu je pomemben še tretji avtor, belgijski umetnik Mathieu Hamaekers s kiparsko plastiko Nemogoči trikotnik, ki nazorno ilustrira Penrosov opis tribarja v realnem prostoru. Primera obeh je mogoče najti na internetu. Penrosov tribar je geometrijsko obravnavan torus s koti 60^0 v dvodimenzionalni izvedbi. Hamaekersova tridimenzionalna kiparska plastika razpolaga s pravimi koti. Površino pokrivajo, lokalno gledano štiri ploskve, gledano po celoti- globalno pa ena ploskev: vozel V4/3. Videz tribarja na lokalnem mestu vzbuja občutek, da gre za lik z večimi ploskvami. Prepričanje izhaja iz geometrijske izkušnje.

Primer 2: Slikar Oscar Reuterswärd je že leta 1940 zrisal podobno nemogoče like s palicami kvadratnih presekov, vendar z drugačno razporeditvijo palic, kot npr. risbA s ciklusa Slike s potovanj[6] (*sl.6B*) s 7 in večimi palicami.

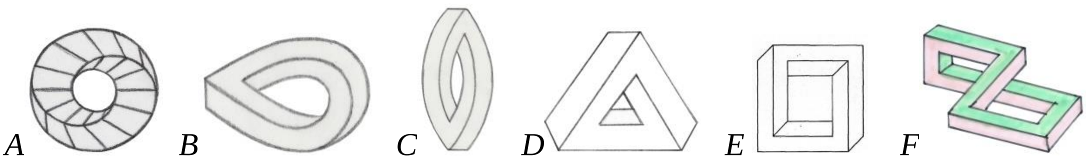

A

B

Slika 6: Penrosov tribar (oznaka: *A,T-3-4);* 6/B, Reuterswärdov nemogoči lik

Primer 3: Spodnja vrsta šestih torusov na sl 7 se razlikuje samo po prvem številu vogalov oz. oglišč. Primer *A* je brez oglišč, zato ima oznako *A* (0), *B* ima eno oglišče (1), *C*(2), *D*(3), *E*(4), *F*(6). Skupna so jim drugo, tretje in četrto torusno število. Drugo število 4 določa kvadratni presek. Tretje torusno število tvori splet dveh Möbiusovih trakov (2 MT4). Vsi liki imajo eno luknjo- tudi lik F, ki je zavit v lemniskato, le da je videz drugačen. Če se pod izrazom tribar pojmuje lik z optično ravnimi palicami kot v zgornjem primeru, potem ta kriterij izpolnjujejo samo liki D, E in F. Celotne notacije vseh likov so sedeče: *A*: T-0-4-2MT4-1, *B*: T-1-4-2MT4-1, *C*: T-2-4-2MT4-1, D: T-3-4-2MT4-1, E: T-4-4-2MT4-1, F: T-6-4-2MT4-1. Iz povedanega izhaja

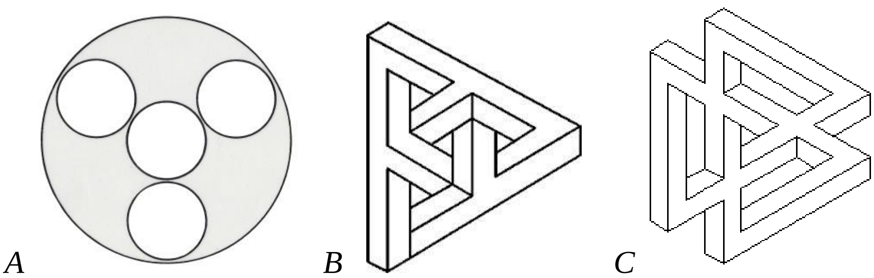
[5] Sharpless Lionel Penrose, Roger Penrose: *Impossible objects: A special type of visual illusion.* In: *British Journal of Psychology.* Vol. 49, Nr. 1, 1958, ISSN 0950-5652, S. 31–33, doi:10.1111/j.2044-8295.1958.tb00634.x.; povzeto po Bruno Ernst, *Der Zauberspiegel des M.C.Escher*, Taco Verlag, 1986, Berlin, str: 87, 88.
[6] Ernst, B**.,** *Das verzauberte Auge,* sl. 34, str. 58.

spoznanje, da ena topološka struktura – v tem primeru 2 MT2 lahko zavzame več različnih oblikovnih vrednosti. Na tak način postane jasno je, da bi področje toroidalnih likov brez poznavanja torusnih števil ostalo s strukturnega ozira nepregledno.



Slika 7: Torusi s presekom 4

Primer 4: Štiritorusi (ali torusi s 4 luknjami) s popolno razliko v prvem številu, delno v drugem (primera *B* in *C* sta v preseku enaka), in enakostjo četrtega števila. Razlike obstajajo tudi v tretjem številu, ki v primeru *A* ne obstaja, v primerih *B* in *C* se določi lokalno- okrog vsake luknje. Pri *B*: T-3-4-V4/3-1 in *C*: T-4-4-2MT4-1.



Slika 8: Geometrijske modifikacije torusa s štirimi luknjami

Zaključek:

V časih, ki prihajajo, bodo torusna števila pridobila na pomenu samo v primeru, če bodo likovni umetniki in arhitekti znotraj posameznih strok čutili potrebo po analitičnem raziskovanju prostorskih konceptov - prostorskih likovnih sintaks, sicer pa ne. Prepričan pa sem, da predstavljajo del vsebin za prihajajoče nove paradigme v znanostih. Smiselna vizualizacija teh vsebin bo temeljila prav na povezavah in razmerjih med geometrijskimi in topološkimi lastnostmi poljubnega obravnavanega objekta. V kontekstu večje transparentnosti so potrebna sledeča dejanja: Geometrijo topologizirati in topologijo geometrizirati.